М. В. Смирнова

Кубанский государственный университет, г. Краснодар,
mariya.smirnova1@mail.ru

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

Рассматривается задача определения плотности потенциала

$$v(x) = \int_Q f(y) ln\,|x-y|\,dS_y,\ x = (x_1, x_2) \in R \tag{1}$$

по его значениям во внешней области $Q^+ = R^2/\bar{Q}$, если Q – заданная ограниченная область.

Функция $f(x)$ раскладывается на гармоническую и ортогональную ей составляющие, $f(x) = g(x) + h(x)$, $x \in \in Q^+$. Функция $h(x)$ дает нулевой вклад в $v(x)$, так как $(h(y), \ln(|x-y|)_Q = 0, x \in Q^+$[1] (через $(\,,\,)_Q$ обозначается скалярное произведение в $L_2(Q)$).

Далее рассматриваются алгоритм определения гармонической составляющей $g(x)$ и некоторые ее свойства:

1. Последовательность точек $z^m \in Q^+$, $m = 1, 2, \dots$, будем называть базисной, если гармонические функции, совпадающие в точках z^m, тождественны. Справедлива

Лемма [2]. *Система функций* $\gamma_m = \ln|z^m - x|$ *замкнута в подпространстве гармонических функций* $G(Q) \subset L_2(Q)$ *и линейно независима.*

Пусть $v(x)$ задана на некоторой базисной поледовательности в Q^+, $v^m = v(z^m) = (f(y), \gamma_m(y))_Q$. Пусть $g^N(x)$ – проекция $g(x)$ на $\{\gamma_m\}_1^N$, $g(x) = g^N(x) + \rho_N(x)$, $g^N(x) = = \sum_{m=1}^N c_m\gamma_m$, $\rho_N \to 0$ при $N \to \infty$.

Подставим вместо $g(y)$ ее разложение, получим

$$\sum_{m=1}^{N} c_m (\gamma_k, \gamma_m)_Q = v^k, \ k = 1..N. \tag{2}$$

Решение этой невырожденной системы определяет аппроксимацию $g^N(x)$.

2. В вычислительном эксперименте возьмем $Q = (0,1) \times \times (0,1)$ и плотность $f(x)$ с выраженной локальной аномалией, а именно:

$$f(x) = \begin{cases} 2, \ x \in q; \\ 1, \ x \in Q/q, \end{cases} \tag{3}$$

здесь $q = \{x : \left|x_k - x_k^0\right| \leqslant \beta; \ k = 1,2; \ \beta << 1\}$ малый квадрат в Q, $x^0 \in Q$.

Вычисления проводились в система MatCAD 14, базисные точки располагались на расстоянии 0.1 – 0.2 от Q, $N = 100$. На рис. 1 приведен график сечения функции $g^N(x)$ при $x_2 = 1$ и $x^0 = (0.5, 0.9)$ и $\beta = 0.05$.

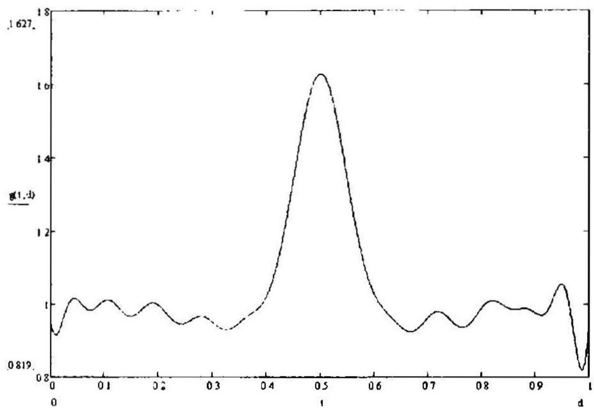

Рис. 1

Работа выполнена в рамках проекта 2.1.1/12952 программы "Развитие научного потенциала высшей школы (2009 – 2011 гг.)" Минобрнауки РФ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новиков П. С. *Об единственности решения обратной задачи потенциала* // Докл. АН СССР. – 1938. – Т. 18. – № 3. – С. 165–168.

2. Лежнев В. Г., Лежнев А. В. *Метод базисных потенциалов в задачах математической физики и гидродинамики.* – Краснодар: КубГУ, 2009. – 111 с.

Н. С. Смирнова

Лицей "Вторая школа", г. Москва,

natasha_smir@bk.ru

О ПЕРИОДЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ФИБОНАЧЧИ НАД $\mathbb{Z}_p$

Хорошо известна последовательность Фибоначчи, которая задается линейным рекуррентным соотношением

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

и начальными условиями $f_0 = 0$, $f_1 = 1$. Будем рассматривать эту последовательность над конечными полями вычетов $\mathbb{Z}_p$, где p — простое. Ясно, что эта последовательность периодична.

Целью работы является исследование периода $T(p)$ последовательности Фибоначчи, а именно, доказательство аналога малой теоремы Ферма, утверждающей, что $T(p) \mid p - 1$, если 5 является квадратичным вычетом по модулю p.